EXERCICE N°1 : 45' 6 points

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-x) & si\ x\le 0\\ x+e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer $\Delta: y=x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en indiquant les deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

3°) On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $h^{-1}(x)$, $x\in J$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de h^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\varphi(x)=x+(x-1)\ln^2(1-x)$.

a) Calculer $\varphi'(x)$, pour $x\in]-\infty,0]$.

b) Soient $\Gamma=\{M(x,y),\text{tels que } y=1+\ln(1-x),\ -1\le x\le 0\}$ et S le solide obtenu par rotation de Γ autour de l'axe (Ox). Calculer le volume $\mathcal{V}$ de solide S.

EXERCICE N°2 : 35' 4 points

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-e^{-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2cm).

1°) a) Montrer que pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $f'(x)>0$.

b) Dresser le tableau des variations de f sur $]-1,+\infty[$.

2°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur $]-1,+\infty[$, une unique solution α.

Vérifier que : $1,5<\alpha<1,6$.

3°) Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit n un entier naturel non nul. On pose U_n la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0, n].

a) Vérifier que pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$.

b) En déduire que : $\int_0^n \dfrac{x-1}{x+1}\,dx=n-2\ln(n+1)$.

c) Montrer que $U_n=1+\dfrac{e^{-n}-1}{n}-\dfrac{2\ln(n+1)}{n}$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

EXERCICE N°3 :	60'	7 points	

A– Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique :3cm).

1°) Dresser le tableau de variation de *f*.

2°) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point O.

3°) Soit *h* la fonction définie sur *IR* par $h(x)=\dfrac{x}{2}-f(x)$.

a) Montrer que pour tout *x* de *IR*, $h'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour $x\in IR$.

c) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T. En déduire que O est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}$.

4°) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ et T.

5°) a) Montrer que *f* admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in\left]-1,1\right[$.

c) Tracer dans le même repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1}.

6°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $f(x)=1+\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation x = ln2.

c) En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation y = ln2

B– On pose pour tout $x\in IR$, $H(x)=\dfrac{x^2}{4}-\int_0^x f(t)dt$.

1°) Montrer que *H* est la primitive de *h* sur *IR* qui s'annule en zéro.

2°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $H(x)=\dfrac{x^2}{4}+x-2\ln\left(\dfrac{1+2e^x}{2}\right)$.

b) Montrer que pour tout $x\in IR$, $H(x)=\dfrac{x^2}{4}-x-\ln\left(\dfrac{1+2e^{-x}+e^{-2x}}{4}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de *H*.

C– Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n f^{-1}(t)\,dt$.

1°) a) Montrer que (I_n) est minorée par zéro.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire que (I_n) est convergente.

2°) a) Démontrer que pour tout $t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, et pour tout $n\in IN^*$ on a: $0\le t^n f^{-1}(t)\le\dfrac{\ln 3}{2^n}$.

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.